به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل ششم-سری‌های توانی

در کاربرگ ۱۲ با مفهوم چندجمله‌ای تیلور آشنا شدیم. چندجمله‌ای تیلور از درجه n تابع f در نقطه $x = c$، به معنایی نزدیک‌ترین چندجمله‌ای از درجه n به تابع f حول آن نقطه است. فرض کنید تابع f در نقطه c از هر مرتبه مشتق‌پذیر باشد، می‌توان سری زیر را تشکیل داد:

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots ,$$

که به سری تیلور f حول c معروف است. قبل از هر چیز توجه کنید که سری فوق به ازای هر عدد حقیقی و یا مختلط x، یک سری عددی است که همگرایی آن را در کاربرگ قبل بررسی کردیم. می‌توان سوال‌های زیر را در مورد سری تیلور f حول c مطرح کرد:

۱. آیا این سری به ازای هر x همگراست؟

۲. اگر سری فوق به ازای بعضی از xها همگرا باشد، مجموعه این xها چگونه مجموعه‌ای است و این مجموعه چه رابطه‌ای با دامنه تعریف f دارد؟

۳. اگر سری فوق در نقطه x همگرا باشد، آیا مجموع سری لزوماً برابر با $f(x)$ است؟

تعریف ۱. برای عدد مختلط c و دنباله‌ای از اعداد مختلط مانند $(c_n)_{n=0}^{\infty}$، تابع زیر را یک سری توانی می‌گویند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n = c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \cdots .$$

فعالیت ۱. آزمون ریشه را برای سری توانی بالا به کار ببرید و نتیجه آن را به صورت یک قضیه بیان کنید.

فعالیت ۲. با توجه به فعالیت ۱، همگرایی سری‌های زیر را در نقاط مختلف بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n$ که در آن c یک عدد مختلط است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{n^p}$ که در آن p یک عدد مثبت و c یک عدد مختلط است.

ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

قضیه ۲. فرض کنید c، c_0، c_1، ... اعدادی مختلط باشند و سری توانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n = c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \cdots \qquad (1)$$

در این صورت، ρای وجود دارد که $0 \leq \rho \leq +\infty$ و

الف) اگر $0 < \rho < +\infty$، سری (۱) به ازای هر z مختلط که $|z-c| < \rho$ به طور مطلق همگرا و به ازای هر z مختلط که $|z-c| > \rho$ واگراست.

ب) اگر $\rho = +\infty$، سری (۱) به ازای هر z به طور مطلق همگراست.

ج) اگر $\rho = 0$، سری (۱) به ازای هر z که $z \neq c$ واگراست.

۱ تابع تحلیلی حقیقی

تعریف ۳. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم f در نقطه c از I تحلیلی است در صورتی‌که بازه‌ای باز درون I مانند $]c-\delta, c+\delta[$ و سری‌ای توانی مانند $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ با ضرایب حقیقی وجود داشته باشند که به ازای هر x در $]c-\delta, c+\delta[$،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n.$$

در صورتی که f در همه نقاط I تحلیلی باشد، می‌گوییم f روی I تحلیلی است.

قضیه زیر در مورد توابع تحلیلی حقیقی برقرار است.

قضیه ۴. سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ را در نظر بگیرید که در آن c و c_nها حقیقی‌اند و فرض کنید ρ، شعاع همگرایی آن، صفر نباشد. در این صورت، تابع $f :]c-\rho, c+\rho[\to \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ تعریف می‌شود روی $]c-\rho, c+\rho[$ تحلیلی است.

فعالیت ۳.

الف) نشان دهید تابع $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ در سراسر $\mathbb{R}$ به استثنای نقطه ۲ تحلیلی است و حول هر نقطه ۰، ۱− و cی دلخواه، که $c \neq 2$، سری توانی‌ای با شعاع همگرایی مثبت پیدا کنید.

ب) نشان دهید که تابع $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ در سراسر $\mathbb{R}$ تحلیلی است. شعاع همگرایی سری تیلور آن حول ۰ را بدست آورید. با توجه به اینکه تابع روی کل $\mathbb{R}$ تحلیلی است، چرا شعاع همگرایی سری تیلور آن حول ۰ بی‌نهایت نیست؟

قضیه ۵. سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ را با شعاع همگرایی $\rho > 0$ در نظر بگیرید. تابع f را روی بازه $]c-\rho, c+\rho[$ به صورت $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

الف) تابع f روی $]c-\rho, c+\rho[$ مشتق‌پذیر است و به ازای هر x در این بازه

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-c)^{n-1}.$$

ب) به ازای هر x در بازه $]c-\rho, c+\rho[$، $\int_c^x f$ وجود دارد و

$$\int_c^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.$$

فعالیت ۴. در قضیه ۵، نشان دهید:

الف) شعاع همگرایی f' بیشتر مساوی ρ است.

ب) تابع f روی $]c-\rho, c+\rho[$ از هر مرتبه مشتق دارد.

ج) $f^k(c) = k!c_k$ برای هر $k \geq 0$.

بنابراین قضیه بعد برقرار است.

قضیه ۶. سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ را با شعاع همگرایی $\rho > 0$ در نظر بگیرید و فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n.$$

در این صورت f روی $]c-\rho, c+\rho[$ از هر مرتبه مشتق دارد و این سری توانی، سری تیلور f حول c است. به ویژه نمایش تابع به صورت سری توانی، در صورت وجود، یکتاست.

فعالیت ۵.

الف) سری تیلور e^x را حول 0 بدست آورید و نشان دهید تابع e^x روی $\mathbb{R}$ تحلیلی است.

ب) سری تیلور تابع $\sin$ و $\sinh$ را حول نقطه 0 بدست آورید. شعاع همگرایی آنها را نیز بدست آورید.

فعالیت ۶.

الف) با توجه به سری تیلور $\frac{1}{1+x}$، سری تیلور تابع $\ln(1+x)$ را حول نقطه 0 بدست آورید.

ب) مانند قسمت (الف)، سری تیلور $\tan^{-1}$ حول 0 را بدست آورید.

فعالیت ۷. آیا تابع زیر در نقطه 0 تحلیلی است؟

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۲ سری دوجمله‌ای

وقتی n عددی طبیعی باشد، با دستور بسط دوجمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

آشناییم. یکی از یافته‌های مهم دوره آغازین حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف این مطلب توسط نیوتن بود که حتی وقتی n طبیعی نباشد، دستور مشابهی برای «بسط دوجمله‌ای» وجود دارد. البته در این مورد عبارت حاصل از بسط دوجمله‌ای، نامختوم است و به صورت یک سری تداوم دارد.

فرض کنید $|a| < b$ و α عددی حقیقی باشد. می‌نویسیم $(a+b)^\alpha = b^\alpha(1+\frac{a}{b})^\alpha$ که در اینجا $|\frac{a}{b}| < 1$. به این ترتیب اگر بتوانیم برای $(1+x)^\alpha$ که $|x| < 1$ نمایش سری توانی پیدا کنیم، می‌توانیم بسط $(a+b)^\alpha$ را نیز بدست آوریم.

فعالیت ۸. سری تیلور $(1+x)^\alpha$ را حول نقطه ۰ بدست آورده و شعاع همگرایی آن را محاسبه کنید.